Blatt 1

Aufgabe 1:

$G = (V, \Sigma, P, S)$

1. $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

   $P = \{S \to \varepsilon, S \to aS\} \Rightarrow V = \{S\}, \Sigma = \{a\}, S = S$

   Typ 3 - regulär

2. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

   $P = \{S \to \varepsilon, S \to aSb\} \Rightarrow V = \{S\}, \Sigma = \{a, b\}, S = S$

   Typ 2 - kontextfrei ($aSb \notin \{aA \mid a \in \Sigma, A \in V\}$)

3. (Schöning S. 15) $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

   $P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc, S \Rightarrow \varepsilon\}$

   $V = \{S, B, C\}, \Sigma = \{a, b, c\}, S = S$

   Typ 1 - kontextsensitiv ($aB \Rightarrow$)

4. $\{x \in \{a, b\}^* \mid \#a(x) = \#b(x)\}$ $\{a, b\}^* = \{a, b\} \circ \{a, b\} \circ \{a, b\} \circ \ldots$

   regulärer Ausdruck ...

   $P = \{S \to SaSbS, S \to SbSaS, S \to \varepsilon\} \Rightarrow V = \{S\}, \Sigma = \{a, b\}, S = S$

   „Es müssen mit jedem a immer ein b eingefügt werden an jeder beliebigen Stelle im Wort"

   Typ 2 - kontextfrei

5. $\{x \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(x) = \#_b(x) = \#_c(x)\}$

   Idee: Bilde eine Folge von gleichvielen Variablen A, B und C. Da die dann geordnet ist, muss man das Schaffen von Unordnung, sprich jegliches Umsortieren, erlauben ...

   $P = \{S \to \varepsilon,$
   $S \to ASBC,$
   $AB \to BA, BA \to AB,$
   $AC \to CA, CA \to AC,$
   $BC \to CB, CB \to BC,$
   $A \to a, B \to b, C \to c\}$

   $\Rightarrow V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b, c\}, S = S$

   Typ 1 - Kontextsensitiv

Aufgabe 2:

Was ist $\frac{1}{7}$ dezimal? $0,\overline{142857}$

Das Ergebnis ist periodisch, es werden also immer die gleichen Zahlen aneinander gereiht ...

$S \rightarrow 1$, $S \rightarrow 1A$,
$S \rightarrow 4$, $S \rightarrow 4B$,
$S \rightarrow 2$, $S \rightarrow 2C$,
$S \rightarrow 8$, $S \rightarrow 8D$,
$S \rightarrow 5$, $S \rightarrow 5E$,
$S \rightarrow 7$, $S \rightarrow 7F$,
$A \rightarrow 4$, $A \rightarrow 4B$
$B \rightarrow 2$, $B \rightarrow 2C$
$C \rightarrow 8$, $C \rightarrow 8D$
$D \rightarrow 5$, $D \rightarrow 5E$
$E \rightarrow 7$, $E \rightarrow 7F$
$F \rightarrow 1$, $F \rightarrow 1A$ ← hier geht's wieder von vorne los...

$\Rightarrow V = \{S, A, B, C, D, E, F\}$, $\Sigma = \{1, 4, 2, 8, 5, 7\}$, $S = S$

Aufgabe 3:

Was kann ich ableiten?

$$S \rightarrow 0AB \xrightarrow{\text{„}B \rightarrow SA\text{“}} 0ASA \xrightarrow[\text{„}S \rightarrow 0AB\text{“}]{} 0A\underbrace{\boxed{0AB}}_{}A \quad \text{Start}$$

$$S \rightarrow 0AB \xrightarrow{\text{„}B \rightarrow 01\text{“}} 0A01 \xrightarrow[\text{„}A0 \rightarrow S0B\text{“}]{} 0S0B1 \xrightarrow[\text{„}S \rightarrow 0AB\text{“}]{} 0\underbrace{\boxed{0AB}}_{\text{Start}}0B1$$

Egal, wie ich vorgehe, erhalte ich immer die Start sequenz.
Und die bekomme ich auch nicht weg, weil weder BA noch B0 zu etwas führen...

$\Rightarrow L(G) = \emptyset$

Aufgabe 4:

$L = \{0^n 1^m \mid n,m \geq 0,\ n \text{ gerade} \Leftrightarrow m \text{ ungerade}\}$

Die Bedingung besagt, dass entweder n oder m ungerade ist.
Insbesondere also nicht beide und nicht keines...
Also kann man L auch so notieren:

$$L = \{\underbrace{(00)^*0(11)^*}_{\text{Nullen ungerade}}, \underbrace{(00)^*1(11)^*}_{\text{Einsen ungerade}}\}$$

„Ungerade ist gerade + 1"

Kontext frei: ergeben sich folgende Produktionen:

$S \Rightarrow Z1$] eine Eins mehr
$S \Rightarrow 0Z$] eine Null mehr
$Z \Rightarrow 00Z$
$Z \Rightarrow Z11$
$Z \Rightarrow \varepsilon$] gerade Anzahl 0er und 1er

Nach der Aufgabenstellung soll das ganze also regulär werden.
Die Regeln müssen also der Form $A \Rightarrow a$, $A \Rightarrow aA$ sein...

Regel aus P	$\#_0$(Satzform) nach Regel	$\#_1$(Satzform) nach Regel	
$S \Rightarrow 0$	ungerade	gerade	✓
$S \Rightarrow 1$	gerade	ungerade	✓
$S \Rightarrow 0A$	ungerade	gerade	
$A \Rightarrow 0B$	gerade	gerade	
$B \Rightarrow 0A$	ungerade	gerade	
$B \Rightarrow 0$	ungerade	gerade	✓
$B \Rightarrow 0C$	ungerade	gerade	C muss also eine gerade Anzahl von 1 erzeugen...
$B \Rightarrow 1C$	gerade	ungerade	~
$C \Rightarrow 1D$	gerade	gerade	
$D \Rightarrow 1$	gerade	ungerade	✓
$D \Rightarrow 1C$	gerade	ungerade	
$S \Rightarrow 1C$	gerade	ungerade	Fehlt noch, weil $\{1(11)^*\} \subset L$

$G = (\{S,A,B,C,D\}, \{0,1\}, P, S)$

Die Korrektheit folgt direkt aus der Konstruktion.
Endpunkte sind nur da, wo Haken sind und da stimmen die Bedingungen. Bei nicht so ausführlicher Konstruktion ist zu zeigen:
$L \subseteq L(G) \wedge L(G) \subseteq L$

Aufgabe 5:

monoton: $\forall \alpha \to \beta \in P \quad |\alpha| \leq |\beta|$

Kontextsensitiv: $\forall \tilde{A} \to \tilde{B} \in P \quad \tilde{A} \in \{\alpha A \gamma \mid \alpha, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*, A \in V\}$

$\tilde{B} \in \{\alpha \beta \gamma \mid \alpha, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*, \beta \in (V \cup \Sigma)^+\}$

mind. 1

Auf den ersten Blick (vor allem, weil es so ungefähr im Schöning steht, sind die Definitionen gleich. Die zweite ist nur etwas komplizierter.

Der entscheidende Unterschied ist jedoch der folgende:
Bei kontextfrei wird nur eine Variable pro Regel abgeleitet:
$\alpha A \gamma \Rightarrow \alpha \beta \gamma$ mit $\beta \in (V \cup \Sigma)^+$
Der Kontext bleibt gleich!

Bei einer monotonen Grammatik ist es aber erlaubt, mehrere Variablen auf einmal abzuleiten:
z.B. $ABC \Rightarrow DEFGHI$

Es soll die Äquivalenz der Aussagen gezeigt werden ($\Leftrightarrow$):
monoton $\Leftrightarrow$ kontextfrei
„$\Leftarrow$" ist klar, da die kontextfreien Sprachen die Monotonieeigenschaft erfüllen. $\Rightarrow$ Schöning S. 17 oder direkt $|\alpha A \gamma| = |\alpha| + \underbrace{|A|}_{=1} + |\gamma| \leq |\alpha| + \underbrace{|\beta|}_{|(V\cup\Sigma)^+| \geq 1} + |\gamma| = |\alpha\beta\gamma|$

„$\Rightarrow$" Für diese Richtung gilt es zu zeigen, dass die monotone Regel aber sich durch mehrere kontextsensitive nachbilden lässt und somit zu ihnen äquivalent ist.
Nehmen wir an, $ABC \Rightarrow DEFGHIJ$ wäre gleichzeitig $A \Rightarrow DEF$, $B \Rightarrow GH$, $C \Rightarrow IJ$

Dann können wir das kontextfrei auch so schreiben:

$ABC \Rightarrow LBC$
$LBC \Rightarrow LBR$
$LBR \Rightarrow L\,GH\,R$
$L\,GHR \Rightarrow DEF\,GH\,R$
$DEF\,GHR \Rightarrow DEF\,GH\,IJ$

oder allgemein:

$A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n \to B_1 B_2 \ldots B_{n-1} B_n$ mit $|B_n| \geq |A_n| \;\forall n$

wird zu

$A_1 \ldots A_n \to L A_2 \ldots A_n$

$L A_2 \ldots A_n \to L A_2 \ldots A_{n-1} R$

$L A_2 \ldots A_{n-1} R \to L B_2 A_3 \ldots A_{n-1} R$

$L B_2 A_3 \ldots A_{n-1} R \to L B_2 B_3 A_4 \ldots A_{n-1} R$

$\vdots$

$L B_2 \ldots B_{n-2} A_n R \to L B_2 \ldots B_{n-2} B_{n-1} R$

$L B_2 \ldots B_{n-1} R \to B_1 B_2 \ldots B_{n-2} B_{n-1} R$

$B_1 \ldots B_{n-1} R \to B_1 B_2 \ldots B_{n-1} B_n$

Wobei $L, R \notin V$.

Warum so kompliziert? Wieso sage ich bei $ABC \to DEFGHIJ$ nicht einfach
$A \to DEF$
$B \to GH$
$C \to IJ$?

Weil dann ja plötzlich A auch ohne den Kontext BC abgeleitet werden kann!
Damit ist die Sprache aber u.U. nicht mehr äquivalent!
Genau aus diesem Grund werden L und R ($\notin V$) gebraucht.
Sie verhindern, dass irgendeine der neuen Regeln außerhalb unseres gewünschten Kontexts verwendet werden können.
Somit kann eine monotone Grammatik durch eine kontextfreie simuliert werden und damit sind beide äquivalent. $\square$

Aufgabe 6:

1. z.z.: $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\} \subseteq L(G) \quad \hat{=} \quad \forall n \geq 0 \quad a^{2^n} \in L(G)$

Induktion nach n:

J-Anfg.: n=0, also $a^{2^0} = a^1 = a \in L(G)$?

$$S \Rightarrow LA'aR \Rightarrow XaR \Rightarrow aXR \Rightarrow a \quad \checkmark$$

J-Annahme: Gelte die Aussage für n. Also $a^{2^n} \in L(G)$.

Betrachten wir den Produktionsprozeß:

$S \Rightarrow LA'aR \Rightarrow XaR \Rightarrow aXR \Rightarrow a$

oder

$\Rightarrow LAaR \Rightarrow LaaAR$ nehmen wir an, hier stünden noch mehr a's, dann würde das A wegen $Aa \Rightarrow aaA$ genau jedes a verdoppeln $(\cdot 2)$ und dann neben dem R stehen bleiben. Wie geht's weiter?

$LaaAR \Rightarrow LaaA'R$ wegen $aA' \Rightarrow A'a$ wandert das A' nach links durch und wir könnten den Spaß wiederholen oder den anderen Übergang wählen $LA' \Rightarrow X$. Mit $Xa \Rightarrow aX$ wandert das X zum R nach rechts und wir erhalten die a's.

$a^{2^n} \in L(G)$ heisst also insbesondere

$$a^{2^n} \Leftarrow a^{2^n}XR \overset{*}{\Leftarrow} Xa^{2^n}R \Leftarrow LA'a^{2^n}R \in L(G)$$

J-Schritt: z.z.: $a^{2^{n+1}} \in L(G)$

Wir wissen schon $LA'a^{2^n}R \in L(G)$, also versuchen wir daraus $LA'a^{2^{n+1}}R$ abzuleiten:

$$LA'a^{2^n}R \Rightarrow LAa^{2^n}R \overset{1)*}{\Rightarrow} L(a^{2^n})^2AR \Rightarrow La^{2^{n+1}}A'R \overset{*}{\Rightarrow} LA'a^{2^{n+1}}R$$

$$\Rightarrow Xa^{2^{n+1}}R \overset{*}{\Rightarrow} a^{2^{n+1}}XR \Rightarrow a^{2^{n+1}}$$

$\square$

1) $LAa^{2^n}R \Rightarrow LAa \cdot a^{2^n-1}R \Rightarrow L\underbrace{a \cdot a}_{a^2}A \cdot a \cdot a^{2^n-2}R$

$$\overset{*}{\Rightarrow} L(a^{2^n})^2AR = La^{2^{n+1}}AR$$

2. Ist mit der Betrachtung der Produktionsphase erledigt.
Es gibt nur zwei Möglichkeiten bei $LA'a^{2^n}R$:
- $LA' \to X$ damit terminiere ich (X nach rechts $XR \to \varepsilon$)
- $LA' \to LA$ damit starte ich einen neuen Verdopplungszyklus.

$\Rightarrow L(G) = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$