5. Übungsblatt: Reguläre Sprachen

Aufgabe 1. (**H** 4 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemma, dass
$L = \{ a^n b^k c^m \mid n, k, m > 0 \text{ und } n = 2k - m \}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 2. (**H** 8 Punkte)
Geben Sie einen minimalen endlichen Automaten an, der die Sprache
$L = \{ 0^n 1^m \mid n, m \geq 0,\; n \text{ gerade } \Leftrightarrow m \text{ ungerade} \}$ (Aufgabe 4, Blatt 1)
akzeptiert und weisen Sie die Minimalität nach.

Aufgabe 3. (**H** 5+6 Punkte)
Die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ sei definiert durch

$$x \in L \;:\Leftrightarrow\; x = 0y10 \text{ oder } x = 0y11, \text{ wobei } y \in \Sigma^*.$$

a) Konstruieren Sie den minimalen Automaten, der L darstellt.

b) Auf Σ^* ist die Äquivalenzrelation R_L wie folgt definiert:

$$xR_Ly \;:\Leftrightarrow\; \forall z \in \Sigma^* \; (xz \in L \;\Leftrightarrow\; yz \in L)$$

Geben Sie die Äquivalenzklassen von R_L an und zeigen Sie, dass sie paarweise verschieden sind.

(Teil a und b können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.)

Aufgabe 4. (**H** 2+2+2 Punkte)
Zeigen Sie mit dem Satz von Myhill, Nerode für **drei** der folgenden Sprachen, dass sie nicht regulär sind:

a) $L_1 = \{ a^n b^m \mid n \neq m \}$,

b) $L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid i \leq k \text{ oder } j \leq k,\;\; i, j, k \geq 1 \}$,

c) $L_3 = \{ b_n \,\&\, b_{n+1}^R \mid n \geq 1 \}$ über dem Alphabet $\{0, 1, \&\}$, dabei ist $b_n \in \{0, 1\}^+$ die Binärdarstellung von n (ohne führende Nullen) und $x^R := x_n \ldots x_2 x_1$ die Spiegelung von $x = x_1 x_2 \ldots x_n \in \Sigma_1^*$,

d) $L_4 = \{ x \in \{a, b\}^+ \mid \#_a(x) = \#_b(x) \}$,

e) $\overline{L}_4 = \{ x \in \{a, b\}^* \mid x \notin L_4 \}$,

f) $L_5 = \{ x \in \{0, 1\}^+ \mid x \neq ww\,, \text{ für } w \in \{0, 1\}^+ \}$.

Aufgabe 5. (**H** 4 Punkte)
Zeigen Sie für **eine** der Sprachen $L_3, \overline{L}_4$ oder L_5 aus Aufgabe 4, dass sie kontextfrei ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)
Wir definieren eine weitere Äquivalenzrelation R'_L auf Σ^* durch

$$xR'_Ly \;:\Leftrightarrow\; \forall w, z \in \Sigma^* \; (\, wxz \in L \Leftrightarrow wyz \in L \,)$$

a)(H) Zeigen Sie dass L regulär ist, wenn der Index von R'_L endlich ist.

b)(T) Gilt auch die Umkehrung?