

15. Übungsblatt: Komplexität

Aufgabe 1. (H 3 + 5 Punkte)

Die Komplexität von WHILE-Programmen können wir entweder wie bei Turingmaschinen uniform, d.h. 1 Schritt hat Komplexität 1, oder logarithmisch, d.h. 1 Schritt kostet so viel wie Bits im Register dafür benötigt werden, messen.

a) Geben sie beide Komplexitäten für das Programm

LOOP x DO $x := x * x$ END; LOOP x DO $x := x * x$ END
in O -Notation an.

b) Wie stark können logarithmisches und uniformes Kostenmaß von WHILE Programmen voneinander abweichen, wenn keine Multiplikation sondern nur die Addition zugelassen ist? D.h. geben sie eine Funktion f mit logarithmisches Kostenmaß in $O(f(\text{uniformes Kostenmaß}))$ an.

Aufgabe 2. (H 5 Punkte)

Geben Sie eine Komplexitätsklasse an, die alle Sprachen enthält, deren charakteristische Funktion von einem LOOP-Programm nach Definition (d.h. nur Wertzuweisungen der Form $x_i := x_j + c$ bzw. $x_i := x_j - c$ sind zugelassen) mit nur zwei LOOP-Anweisungen berechnet werden kann. Begründung!

Aufgabe 3. (H 5 Punkte)

Ein Schaltkreis sei beschrieben durch ein Wort $g_1 g_2 \dots g_n \in \{0, 1, +, *, (,)\}$, wobei $g_i = (0)$, $g_i = (1)$, $g_i = (+, j, k)$ bzw. $g_i = (*, j, k)$ bedeutet, dass Gatter i die 0, die 1, die 'oder' bzw. die 'und' Verknüpfung von Gatter j und Gatter k liefert. (Es seien $j, k > i$ und binär codiert.)

Zeigen Sie, dass das Problem, ob ein so beschriebener Schaltkreis eine 1 bei Gatter 1 ausgibt, auf das Problem, ob eine gegeben Grammatik überhaupt ein Wort erzeugen kann, reduziert werden kann

Aufgabe 4. (H 2 + 6 Punkte)

Ein bekanntes NP-vollständiges Problem sei das des König Artus: Gegeben eine Liste von Paaren von verfeindeten Rittern. Gibt es eine Sitzordnung an der Tafelrunde, bei der keine verfeindeten Ritter nebeneinander sitzen müssen?

Zeigen Sie, dass auch folgendes Problem des Handlungsreisenden NP-vollständig ist: Gegeben eine Liste von Reisepreisen zwischen je 2 Städten und ein maximal zur verfügungstehender Geldbetrag. Frage: Gibt es eine erschwingliche Rundreise, bei der jede Stadt besucht werden kann? Dazu:

a) Geben Sie einen nichtdeterministischen, polynomiell zeitbeschränkten Algorithmus für den Handlungsreisenden an.

b) Geben sie eine in polynomieller Zeit berechenbare Reduktion des Problems der König Artus auf das des Handlungsreisenden an.

Dies ist kein reguläres Aufgabenblatt mehr, d.h. es sind keine Lösungen abzugeben und die Punkte sollen nur ein Gefühl für die Schwierigkeit der Aufgaben geben. (Lediglich in Ausnahmefällen kann, wer aus triftigem Grund (z.B. Krankheit) eines der Blätter nicht bearbeiten konnte, noch Punkte erhalten (in diesem Fall Abgabe direkt beim Tutor).)